ANWENDUNGEN DER TRANSITIVEN HÜLLE (TH)

geg. Graphen ↔ Strukturen

S = (M, N, f)

Trägermenge, Knoten — M

f: $M \times M \to N \cup \{\varepsilon_o\}$

Kantenbewertung: — N

ε_o - keine Kante

• {0, 1}	→ Adjazenzmatrix	0 (false)	relationale Struktur
• $R(0, \infty)$	→ Abstandsmatrix	MaxInt	funktionale Struktur
• $R(-\infty, \infty)$	→ Erzeugnisstrukturmatrix	0	funktionale Struktur
• A*	→ Matrix der Kantenbezeichnungen (ZK über Alphabet A)	“ “	funktionale Struktur

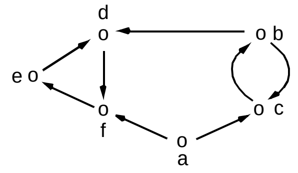
Interpretation der Transitiven Hülle
für relationale und verschiedene funktionale Strukturen:

#	Semiring (N, add, mul)	Matrix	Transitive Hülle
1	({0,1}; $\vee$, $\wedge$)	Adjazenzmatrix	Erreichbarkeitsmatrix
2	(R (0, ∞); min ,+)	Matrix der direkten Abstände	Matrix der kürzesten Abstände
3	(R (- ∞, ∞); +, ∗)	Erzeugnisstrukturmatrix	kummulative Stückzahlmatrix
4	(A*, ⊕,⊙)	Matrix der Kantenbezeichnungen	Wegematrix

$\to \forall x \in N$: x add $\varepsilon_o \to$ x
x mul $\varepsilon_o \to \varepsilon_o$

1. Erreichbarkeit

Beispiel:



	a	b	c	d	e	f
a			1			1
b			1	1		
c		1				
d						1
e				1		
f					1	

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	1	1	1
b		1	1	1	1	1
c		1	1	1	1	1
d				1	1	1
e				1	1	1
f				1	1	1

Eingabe: Matrix der adjazenten Knoten (Adjazenzmatrix)

Kante: $o_i \to o_j$

“*i* steht mit *j* direkt in Beziehung”

Operation: add → $\vee$
mul → $\wedge$

Ausgabe: Erreichbarkeitsmatrix

m [i, j] = 0 : es gibt keinen gerichteten Kantenzug (Weg) von *i* nach *j*

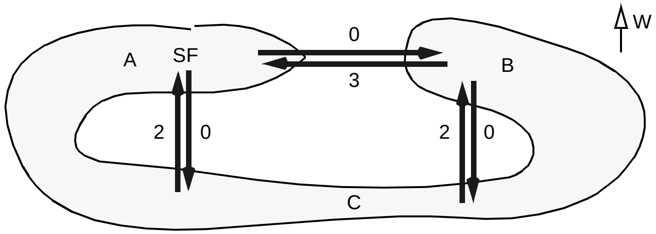
m [i, j] = 1 : Es gibt einen Weg von *i* nach *j*

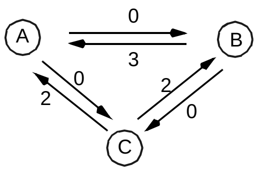
m [i, i] = 1 : *i* liegt auf einem Kreis

$\forall$ *i, j : m [i, j] = 1* : starker Zusammenhang

2. Kürzester Abstand (Wert des Weges, nicht Weg selbst)

Beispiel:





	A	B	C
A	ε_o	0	0
B	3	ε_o	0
C	2	2	ε_o

2	0	0
2	2	0
2	2	2

ε_o = MaxInt

Eingabe: Matrix der direkten Abstände

Kante: $\underset{i}{o} \xrightarrow{x} \underset{j}{o}$

"der Übergang von *i* nach *j* ist mit *x* Kosteneinheiten verbunden"

Operation: add → minimum
mul → plus (+)

Ausgabe: Matrix der kürzesten Abstände

m [i, j] = y

"der kürzeste Weg von *i* nach *j* ist mit *y* Kosteneinheiten verbunden"

3. Kummulative Stückzahl

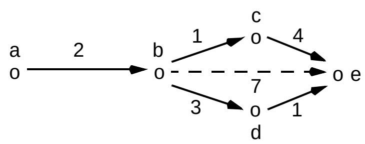
Beispiel:

Erzeugnisstrukturmatrix (Gozinto-Graph)
→ zur Beschreibung des Materialflusses in einem Fertigungsprozeß

Knoten: Teile, Bauelemente, Baugruppen, allg. Operanden, die in ein Erzeugnis eingehen

Kante: $\underset{i}{o} \xrightarrow{x} \underset{j}{o}$

"Zur Herstellung des Operanden *j* wird der Operanden *i* *x*-mal benötigt."



"Wie oft ist *a* in *e* enthalten?"

→ $\sum\limits_{\text{alle Wege}} \prod\limits_{\text{alle Kanten}}$ Gewichtsfaktor

m:	a	b	c	d	e
a		2			
b			1	3	
c					4
d					1
e					

→ *m [a, e] = 2 * 1 * 4 + 2 * 3 * 1*
= 8 + 6
= 14

Eingabe: Erzeugnisstrukturmatrix

Operation: add → plus (+)
mul → times (*)

Ausgabe: kummulative Stückzahlmatrix

m [i, j] = y

"der Operand *i* geht in *j* *y*-mal ein"

4. Berechnen aller Wege

<u>Eingabe:</u> Matrix der Kantenbezeichnungen (Buchstaben)

• jeder Kante a_{ij}

$$\underset{i}{o} \rightarrow \underset{j}{o}$$

ist eineindeutig ein Kodezeichen $a_{ij} \in A$ aus dem Zeichenvorrat (Alphabet) A zugeordnet;

• ε_o = " " (Leerzeichen);

Anmerkung: N (Wertebereich für Kantenbewertung) = A^*, Menge der Worte über dem Zeichenvorrat A

<u>Operation:</u> <u>add</u> → ZK-Add #

$a \# b = a$ für a *cont* b
$a \# b = b$ für b *cont* a
$a \# b = a, b$ sonst

Anmerkung: *a <u>cont</u> b:* Wort a ist ein Wort b enthalten (als Teilwort oder auch als durch andere Zeichen $\in A$ unterbrochene Zeichenfolge)

a, b: Aufzählung der Worte a und b

<u>mul</u> → ZK-Mul *

$a * b = ab$ (Verknüpfung der Worte a und b)

<u>Ausgabe:</u> Wegematrix

$m[i, j] \neq \varepsilon_o,\ i \neq j$:	Gesamtheit aller kreisfreien Wege vom Knoten i zum Knoten j, dargestellt in Wortnotation über A;
$m[i, i] \neq \varepsilon_o$:	Gesamtheit aller Kreise, in denen i als Knoten enthalten ist; dargestellt in Wortnotation über A;
$m[i, j] = \varepsilon_o$:	es existiert kein Weg von i nach j;

5. Berechnen aller Minimalwege

<u>Eingabe:</u> Matrix der Kantenbezeichnungen (Buchstaben)

• jeder Kante a_{ij}

$$\underset{i}{o} \rightarrow \underset{j}{o}$$

ist eineindeutig ein Kodezeichen $a_{ij} \in A$ aus dem Zeichenvorrat (Alphabet) A zugeordnet;

• ε_o = " " (Leerzeichen), $\varepsilon_o \notin A$;

Anmerkung: N (Wertebereich für Kantenbewertung) = $A^* \cup \{\varepsilon_o\}$; A^* - Menge der Worte über dem Zeichenvorrat A;

<u>Operation:</u> <u>add</u> → ZK-Add #

$a \# b = a$ für *length (a) < length (b)*
$a \# b = b$ für *length (b) < length (a)*
$a \# b = a, b$ *sonst*

mit *length (a)* - Länge des Wortes a (Anzahl Zeichen aus dem Alphabet A);

length (ε_o) - undefined

<u>mul</u> → ZK-Mul *

$a * b = ab$ (Verknüpfung der Worte a und b)

<u>Ausgabe:</u> Matrix der Minimalwege

$m[i, j] \neq \varepsilon_o,\ i \neq j$:	Gesamtheit aller Wege vom Knoten i zum Knoten j mit der kleinsten Anzahl von Kanten (in Wortnotation);
$m[i, i] \neq \varepsilon_o$:	Gesamtheit aller Kreise durch Knoten i mit der kleinsten Anzahl von Kanten (in Wortnotation);
$m[i, j] = \varepsilon_o$:	es existiert kein Weg von i nach j

6. Transitive Reduktion (TR)

- Gegenteil zur Transitiven Hülle: “Intransitiv machen”
  $\rightarrow$ Streichen aller transitiven Überbrückungen *TR(r)*

- nur eindeutig für kreisfreie Relation (schließt Irreflexivität ein)

- ist eine Relation *r* intransitiv, so sollte gelten:
  TR (TH (r)) = r;

  einfachste Realisierung über allg. Matrixoperationen:
  <u>add</u> $\rightarrow$ <u>minus</u>, d.h.
  $h[i,j] := h[i,j]$ <u>minus</u> $h[i,k]$ <u>mul</u> $h[k,j]$

Auslegung von <u>minus</u> für verschiedene Strukturen:

1. *({0, 1}; $\vee$, $\wedge$)* $a \wedge \bar{b}$

2. *(R / 0 , ∞); min, +)* für $a = b : \infty$
für $a \neq b : a$

3. *(R (- ∞, ∞); +, *)* $a - b$

.
.
.

$\rightarrow$ [Stoschek 81], Angewandte Strukturtheorie